

# Погрешности физических измерений.

## 1. Погрешности физических измерений

Целью эксперимента является определение численного значения физической величины. Истинное значение физической величины - это такое значение, которое идеальным образом отображает соответствующие свойства объекта.

Определение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств называется измерением.

### 1.1. Прямые и косвенные измерения

Прямым измерением - называют измерение, при котором значение физической величины находят непосредственно из опытных данных, как показания использованных измерительных приборов. Косвенное измерение - такое, при котором значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и другими величинами, определяемыми путем прямых измерений, то есть вычисляя по формуле.

Например, требуется определить ускорение тела при его прямолинейном равноускоренном движении. Прямым измерением определяются время  $t$  (по секундомеру) и путь  $S$  (по линейке). Ускорение  $a$  определяется в результате косвенного измерения, то есть вычисляется по формуле:

$$a = 2S/t^2$$

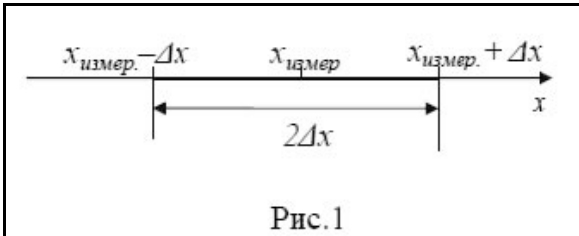
При проведении измерений вследствие несовершенства методов и средств измерений, непостоянства внешних условий получают не истинное, а приближенное значение физической величины. Процесс измерения можно считать завершенным только тогда, когда указано не только значение  $x_{измер}$ , но и возможное его отклонение от истинного значения - погрешность.

### 1.2.1. Понятие погрешности.

Точность измерений определяется близостью результата измерения к истинному значению измеряемой величины. Точность измерений характеризуется погрешностью измерения.

По форме числового выражения различают два вида погрешности абсолютную и относительную.

Абсолютная погрешность  $\Delta x$  - величина возможного отклонения измеренного значения  $x$  от истинного. Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины и определяет границы числового интервала, в котором с вероятностью, близкой к единице, содержится истинное значение величины  $x$ .



Для истинного значения величины  $x$  справедливо соотношение:

$$x_{измер} - \Delta x \leq x \leq x_{измер} + \Delta x.$$

Числовой интервал  $2\Delta x$ , в котором с вероятностью, близкой к единице, содержится истинное значение величины  $x$ , называется доверительным интервалом. Относительная погрешность  $\epsilon_x$  - безразмерная величина, равная отношению абсолютной погрешности, измеренному значению величины  $\epsilon_x = \Delta x/x$ .

## 2. Статистическая обработка результатов измерений

### 2.1. Вычисление погрешностей прямых измерений

При оценке точности прямого измерения будем учитывать случайную погрешность и погрешность средства измерения.

#### 2.1.1. Случайная погрешность.

Выполнив  $n$  измерений величины  $x$  при неизменных условиях опыта, получим ее значения:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Разброс значений  $x$ , связан со случайной погрешностью измерения величины  $x$ . Наилучшим приближением к истинному значению измеряемой величины  $x$  является среднее арифметическое измеренных значений:

$$x_{ср} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n \quad (3)$$

Степень разброса результатов измерения и случайную погрешность можно оценить по величине среднего отклонения результатов от среднего значения:

$$\Delta x_{ср} = (|x_{ср} - x_1| + |x_{ср} - x_2| + \dots + |x_{ср} - x_n|) / n \quad (4)$$

где  $x_i$  -  $i$ -ое (любое, некоторое) значение измеренной величины;  $x_{ср}$  - среднее арифметическое значение, рассчитанное по формуле (3);  $n$  - количество измерений одной и той же величины в одних и тех же условиях

#### 2.1.2. Погрешности средств измерений (приборная погрешность)

Погрешность средства измерения  $\Delta x_{пр}$  - разность между показанием прибора и истинным значением измеряемой величины.

Погрешность средства измерения является систематической, то есть даёт отклонение измеренной величины от истинной в одну сторону, но мы никогда не знаем, в какую именно. Любой прибор позволяет проводить измерения лишь с определенной точностью, погрешность зависит от вида прибора.

1. В приборах, у которых переход от одного значения к другому осуществляется скачком (стрелочный секундомер, весы с разновесами), инструментальная погрешность равна величине скачка.

2. Инструментальная погрешность приборов, снабженных нониусом (штангенциркуль, микрометр), равна точности нониуса:

$$\text{Точность нониуса} = \frac{\text{цена деления основной шкалы}}{\text{число делений нониуса}}$$

3. Погрешности электроизмерительных стрелочных приборов рассчитываются по классу точности. Класс точности  $K$  определен отношением абсолютной погрешности  $\Delta x$  к используемому пределу измерения прибора  $X$  и выражен в процентах.

$$K = \Delta x / X \cdot 100\%$$

Следовательно, абсолютная погрешность измерения данным прибором рассчитывается по формуле:

$$\Delta x = KX / 100\% \quad (5)$$

Электроизмерительные приборы имеют восемь классов точности:  $K = (0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0)$ . Чем выше класс точности, тем меньше значение  $K$  и меньше погрешность измерения.

4. Погрешность измерения цифровыми приборами рассчитывается по формулам, представленным в паспорте прибора. Так для микро-мультиметра «Электроника ММЦ-01» формула для расчета относительной погрешности измерения напряжения постоянного тока, выраженной в процентах, имеет вид:

$$\epsilon_U = (0,2 + 0,1(U_n / U_x - 1)) \quad (6), \text{ где } U_n \text{ — используемый предел измерений напряжения; } U_x \text{ — измеренное значение напряжения.}$$

5. Для прочих приборов с делениями (линейка, транспортир термометр и т. п.) в качестве инструментальной погрешности принимается погрешность отсчёта, равная половине цены деления шкалы прибора.

### 2.1.3. Полная погрешность прямых измерений

Результирующая погрешность прямого измерения рассчитывается по формуле:

$$\Delta x_{\text{прям}} = \Delta x_{\text{пр}} + \Delta x_{\text{сл}} \quad (7)$$

Если  $\Delta x_{\text{пр}} \gg \Delta x_{\text{сл}}$ , то  $\Delta x_{\text{прям}} \approx \Delta x_{\text{пр}} \quad (7a)$

В случае, если  $\Delta x_{\text{сл}} \gg \Delta x_{\text{пр}}$ , погрешностью средства измерений можно пренебречь. Однако, это одновременно говорит о том, что эксперимент проведен некачественно. Необходимо увеличить число измерений, чтобы уменьшить случайную погрешность.

Если данная физическая величина измеряется один раз, то в качестве погрешности прямого измерения берут инструментальную погрешность  $\Delta x_{\text{пр}}$ .

Значение результата прямых измерений записывается в виде  $x = x_{\text{ср}} \pm \Delta x \quad (8)$

### 2.2. Погрешность физических постоянных, табличных данных, данных установок (погрешности округления)

Физические постоянные (константы) считают точными величинами. В этом случае значение данной величины подставляется в расчетную формулу с числом значащих цифр на одну больше, чем число значащих цифр, полученных в результате прямых измерений. При этом относительная погрешность округления константы окажется на порядок меньше погрешности прямого измерения и ею можно пренебречь.

Многие табличные данные, используемые в расчетах, представлены с большой точностью. В этом случае при выборе числа значащих цифр для подстановки в расчетную формулу руководствуются предыдущим правилом.

Если же табличные данные, данные установок определены с точностью, сопоставимой с результатом прямых измерений, то такие данные считаются приближенными. В этом случае погрешность табличной величины принимают равной половине единицы последнего разряда, приведенного в таблице числа.

Пример: если  $m = 8,0 \text{ г}$ , то  $\Delta m = 0,05 \text{ г}$ ;

если  $M = 4 \text{ г}$ , то  $\Delta M = 0,5 \text{ г}$ .

Результатом косвенных измерений является величина  $Y$ , рассчитанная по соответствующей формуле с использованием средних значений результатов прямых измерений.

Погрешность косвенно измеряемой величины определяется погрешностями величин, полученных в процессе прямых измерений, а также погрешностями табличных данных и других постоянных, входящих в расчетную формулу.

Формула для вычисления относительной погрешности косвенного измерения  $\epsilon_Y = \Delta Y / Y$  зависит от вида расчётной формулы для  $Y$  и приводится в описании каждой лабораторной работы. Абсолютная погрешность косвенного измерения  $\Delta Y$  очевидно может быть рассчитана по формуле:

$$\Delta Y = Y \cdot \epsilon_Y \quad (9)$$

#### 2.1. Правила записи чисел.

В десятичной системе любое число записывают с помощью цифр **0, 1, 2, ..., 9**. Перечисленные цифры, кроме нуля, называют значащими. Ноль тоже относят к значащим цифрам, если он стоит в середине числа. Результаты физических и технических экспериментов принято записывать только значащими цифрами. Наиболее удобна следующая запись:

запятую ставят после первой отличной от нуля цифры, а значащую часть числа умножают на десять в соответствующей целой степени. Например, вместо **0,000567** пишут  **$5,67 \cdot 10^{-4}$** , а вместо **3450000** пишут  **$3,45 \cdot 10^6$** .

Количество значащих цифр в промежуточных расчётах не должно быть слишком большим. Как правило, числа, получаемые при работе с калькулятором, необходимо округлять, оставляя не более 4-5 значащих цифр.

#### 2.2. Правило округления абсолютной погрешности.

Количество значащих цифр абсолютной погрешности не должно быть более двух. Две цифры оставляют в том случае, если первая значащая цифра погрешности «1» или «2». Если первая цифра больше «2», то абсолютную погрешность округляют так, чтобы оставалась одна значащая цифра.

2.3 Правила округления и записи результата. Результат измерения ( $x$  или  $Y$ ) должен быть округлен (или уточнен) с учетом погрешности измерения: разряд последней цифры результата должен совпадать с разрядом последней значащей цифры погрешности. Результат записывается с указанием погрешности, определяющей доверительный интервал, с соответствующими единицами измерения:  $Y = Y \pm \Delta Y \quad (10)$  Пример 1.

В эксперименте было определено сопротивление проводника  $R = 2,756 \text{ Ом}$  и абсолютная погрешность  $\Delta R = 0,056 \text{ Ом}$ . По правилу 2.2 округляем абсолютную погрешность  $\Delta R = 0,06 \text{ Ом}$ . По правилу 2.3 округляем результат до сотых:  $R = 2,76 \text{ Ом}$ . Окончательный результат записывают в виде:  $R = (2,76 \pm 0,06) \text{ Ом}$ .

Пример 2.

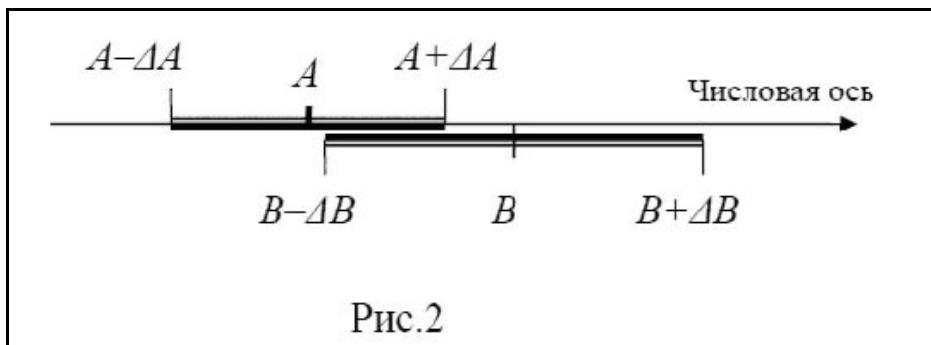
В эксперименте была определена емкость конденсатора  $C = 4,1435 \cdot 10^{-8} \text{ Ф}$  и абсолютная погрешность

$$\Delta C = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}. \text{ Окончательный результат записывают в виде: } C = (4,14 \pm 0,12) \cdot 10^{-8} \text{ Ф}.$$

#### 2.4. Правило сравнения результатов.

Пусть истинное значение изучаемой величины известно или в процессе работы одна и та же величина определяется

разными способами. Значения двух величин **A** и **B** считаются совпадающими, если их доверительные интервалы перекрываются (рис.2). В этом случае, очевидно, выполняется соотношение:  $|A - B| < \Delta A + \Delta B$ .



### 3. Построение графиков

При изучении зависимости одной измеряемой величины от другой целесообразно представить результаты в форме графика. Главное достоинство графика - его наглядность. График позволяет получить общее качественное представление о характере зависимости, а также судить о соответствии экспериментальных данных той или иной теоретической зависимости. На графиках легко видеть "выпадение" точек, которые, как правило, соответствуют наблюдениям с грубыми погрешностями (промахами).

Графики следует строить на листах миллиметровой бумаги. Масштаб графика по обеим осям нужно выбирать так, чтобы предполагаемые зависимости обладали наибольшей наглядностью и заполняли большую часть графика. Поле графика заключают в прямоугольную рамку, согласуя ее с основными линиями сетки. Стрелки на концах экспериментальных графиков не ставят (стрелки принято ставить лишь на иллюстрационных графиках качественного характера, построенных в произвольном масштабе). На концах осей (если на осп используется лишь интервал, то и в начале осп) нужно указать обозначение соответствующих физических величин и единицы измерений этих величин. Учитывая, что миллиметровая бумага имеет очень мелкую сетку, оцифровывать нужно лишь деления крупной сетки. Допустимые значения, определяющие масштабы, следующие: **0,1,2,3,...; 0,2,4,6,.....; 0,5,10,....** Эти значения могут быть умножены на  $10^{\pm n}$ . Недопустимо наносить на оси числовые значения величин, полученных в ходе опыта!

Размеры экспериментальных точек должны быть соотнесены с погрешностями измерения соответствующих величин. Линия графика должна быть гладкой, она проводится так, чтобы по обе стороны от нее располагалось примерно одинаковое число "выпадающих" точек. Под графиком должно быть подписано пояснение или название.

Возможные варианты графического представления результатов показаны на рис. 4.

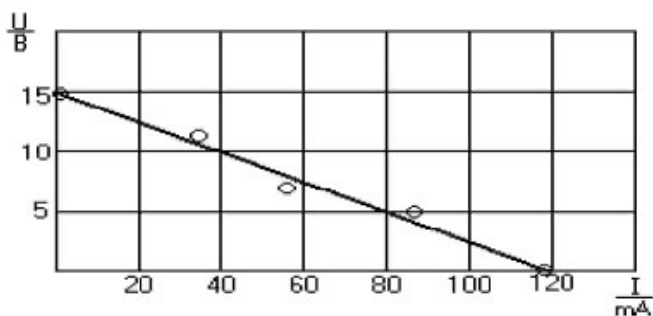
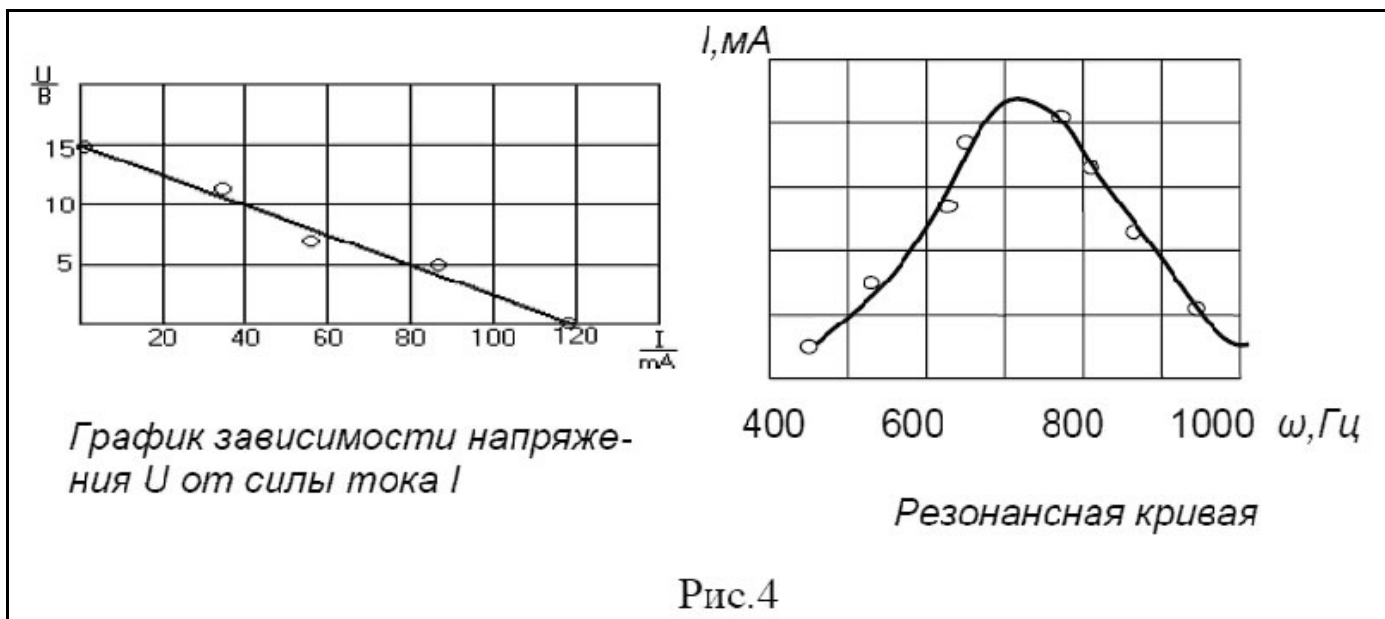
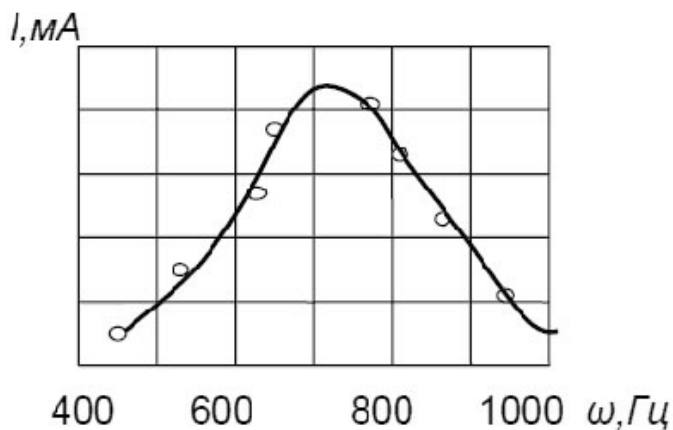


График зависимости напряжения  $U$  от силы тока  $I$



Резонансная кривая